1-5 ADABC
6-10 ADDCC
11-15ADDCB
16-20 BCABC
21.AC 22.BD 23.AD
【03 题详解】
牛顿万有引力定律给出

$$F=\frac{GMm}{r^2}$$

其中 M 为中央天体质量，题中说明该质量不变，因此地球受黑洞的引力和受太阳的引力相同，故地球的轨道不会变化。
答案是 A。
【11 题详解】
答案：A
解析：
此题主要分为两步，先计算轨道高度，再计算坠落时间。
由于位于同步轨道，轨道周期等于自转周期，因此有以下计算：

$$\frac{R_s^3}{T^2}=\frac{GM}{4\pi^2}$$

由于其他条件可忽略，因此可以认为到达该行星表面的时间与到达行星中心的时间大致相同。假设当羽毛落到地面时，它处于一个椭圆轨道上，半短轴趋于零，半长轴等于卫星轨道半径的一半。该行星是椭圆的焦点之一。在这种情况下，卫星将需要一半的轨道周期才能到达该行星。因此，可以继续使用开普勒第三定律来确定卫星到达该行星所需的时间：

$$\frac{(2t)^2}{(\frac{R_s}{2})^3}=\frac{4\pi^2}{GM}=\frac{T^2}{R_s^3}$$

$$32t^2=T^2$$

$$t=\frac{\sqrt{2}}{8}T$$

$$t=\frac{\sqrt{2}}{8}\times 27=\frac{27\sqrt{2}}{8}h\approx 4h46min$$

故答案选 A.
【14 题详解】
答案：C
解析：
根据题目中的周光关系公式，得到该星的绝对星等为：

$$M=-1.43-2.81lg(50.17)\approx-6.21$$

根据距离模数公式，

$$m-M=-5+5lgd$$

$$d=10^{\frac{m-M+5}{5}}=10^{\frac{18.4-(-6.21)+5}{5}}\approx 8.35\times 10^5pc\approx 2.72\times 10^6ly$$

与选项 C 最接近。
【16 题详解】
首先该问题肯定是有意义的，宇宙星体的退行速度是可以超过光速的，因为超光速运动的是

膨胀的宇宙，而不是星体，这个假设不违反相对论的基本假设，即物体运动速度不能超过光速。

求这个问题需要引入相对论修正后的红移与速度的关系：

$$1+z=\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

解 v，有

$$v=\frac{(1+z)^2-1}{(1+z)^2+1}c$$

带入 z ＝ 1，有

$$v=\frac{2^2-1}{2^2+1}c=\frac{3}{5}c$$

求出退行速度后，带入哈勃定律

$$d=\frac{v}{H_0}=\frac{3}{5}\frac{c}{H_0}=2569\,\mathrm{Mpc}$$

答案是 B。

【17 题详解】

为了求出第四宇宙速度，先求出第三宇宙速度，地球轨道处逃逸太阳的速度为

$$v=\sqrt{\frac{2GM_s}{R}}=42.127\,\mathrm{km/s}$$

考虑到卫星在逃逸的过程中，卫星会获得地球绕转太阳的轨道速度，故在脱离地球引力后，逃离太阳引力所需的速度为

$$v_{esc}^{'}=\sqrt{\frac{2GM_s}{R}}-\sqrt{\frac{GM_s}{R}}=\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{\frac{GM_s}{R}}=12.339\,\mathrm{km/s}$$

设此时探测器的动能为\(E_f\)，为了逃离地球，探测器需要达到第二宇宙速度，记探测器逃离地球所需的动能为\(E_2\)，那么探测器从地球出发，逃离太阳需要的总动能为

$$E_3=E_f+E_2$$

三者的速度则有如下关系

$$v_3^2=v_{esc}^{'2}+v_2^2$$

其中v_3为第三宇宙速度，v_2为第二宇宙速度，$v_2=11.187\,\mathrm{km/s}$，因此第三宇宙速度为

$$v_3=\sqrt{v_{esc}^{'2}+v_2^2}=16.655\,\mathrm{km/s}$$

同理我们可以求出第四宇宙速度，考虑到太阳绕转银河系带来的速度后，银河系边缘的逃逸速度为

$$v_{esc}=\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{\frac{GM_{gal}}{R_{gal}}}=298.216\,\mathrm{km/s}$$

因此第四宇宙速度为

$$v_4=\sqrt{v_{esc}^2+v_3^2}=298.681\,\mathrm{km/s}$$

答案为 C。

【19 题详解】

白矮星的“束缚态”由引力势能维持（引力势能为负，表明恒星被自身引力束缚）。要变为“非束缚态”，需系统总能量≥0，即燃烧释放的能量需抵消引力势能的绝对值。

设需要燃烧的碳氧混合物质量为(m_1)，则：

$$燃烧释放的总能量 = |引力势能|$$

代入数据得能量守恒方程：

$$m_1 \times 7.3 \times 10^{13}\ \mathrm{J/kg} = 5.1 \times 10^{43}\ \mathrm{J}$$

求解方程：

$$m_1 = \frac{5.1 \times 10^{43}\ \mathrm{J}}{7.3 \times 10^{13}\ \mathrm{J/kg}} \approx 6.99 \times 10^{29}\ \mathrm{kg}$$

将其转化为太阳质量：

$$m_1 = \frac{6.99 \times 10^{29}\ \mathrm{kg}}{1.989 \times 10^{30}\ \mathrm{kg}/M_\odot} \approx 0.35\ M_\odot$$

【20 题详解】
气体热运动的平均动能为

$$K = \frac{3}{2}kT$$

聚变过程中，氢原子需要克服库伦力势能从而发生聚变，由于库伦力和引力均为平方反比力，其势能形式应该相同。

$$U = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r}$$

其中 Q 为氢原子的电荷，$Q = e$ 为基本电荷，如果聚变要发生，动能必须大于势能，否者两原子无法接近彼此，因此边界条件为

$$\frac{3}{2}kT_{min} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} = 0$$

解出T_{min}，有

$$T_{min} = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{kr} \approx 10^{10}\ \mathrm{K}$$

答案是 C。

可以发现经典条件下聚变所发生的最低温度远大于太阳核心温度，经典理论在此处失效了。量子隧穿效应可以解释为何太阳核心会发生核聚变，在量子隧穿效应中，一个原子有可能穿过库伦势能构造的势能壁垒，故所需的动能相比经典理论中会大大降低。
【23 题详解】
答案：AC
解析：光变曲线食外变化较小，是大陵五型食双星的特征，A 正确；绕转周期两次主极小或

两次次极小之间的时间间隔，约为 2.5 天，B 错误；伴星温度较低所以掩食主星造成的亮度下降较大，C 正确；次极小对应伴星掩食主星，此时由于伴星相对主星较小且轨道倾角恰好为 90 度，主星完全遮蔽伴星，亮度下降 20%，即伴星亮度为整个系统的 20%，D 错误。

25.

（1）

$$\frac{4200}{600}=7$$

焦比为 F/7。

（2）

使用瑞利判据计算最小分辨角：

$$\theta=1.22\frac{\lambda}{D}=1.22\times\frac{440\times10^{-9}}{600\times10^{-3}}\approx8.95\times10^{-7}\mathrm{rad}\approx0.185''$$

再计算 1 个像素对应的角距离：

$$\frac{30.17'}{4096}\approx0.00737'\approx0.442''$$

取二者中较大的，则可以分辨的最小角距离是 0.442 角秒。

26.

假设变轨时，卫星的轨道也为椭圆，我们可以通过这个求出变轨轨道的极坐标方程。

设变轨轨道的极坐标方程为

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

这个轨道近日点与旧轨道近日点重合，即

$$\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos0}=a_1(1-e_1)=12000\ \mathrm{km}$$

该轨道的另外一点位于新轨道的半短轴处，我们需要先求出来第二次变轨瞬间的卫星的极坐标。

位于椭圆半短轴处的点距离椭圆焦点的距离是椭圆的半长轴，因此$r_2=a_2=25000\ \mathrm{km}$，此时其极角的余弦值为

$$\cos\theta_2=\frac{1}{e_2}\frac{a_2\left(1-e_2^2\right)}{r_2}-1=-\frac{2}{5}$$

因此得出第二个关于变轨轨道的方程

$$r_2=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta_2}=25000\ \mathrm{km}$$

联立两方程，有

$$\begin{cases}\dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos0}=a_1(1-e_1)=12000\mathrm{km}\\ r_2=\dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta_2}=25000\mathrm{km}\end{cases}$$

解出

$$\begin{cases}a=29333\mathrm{km}\\ \end{cases}$$

$$e = 0.591$$

现在需要求出来两个速度矢量的夹角，最直观的想法当然是通过求导求出来夹角的大小，但是我们可以用角动量守恒来处理（及开普勒第二定律）

$$L = mv_{peri}r_1 = mvr_2 \sin\alpha$$

其中α是第二次变轨前速度矢量和位置矢量的夹角，因此可以解出α

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{v_{peri}}{v} \cdot \frac{r_1}{r_2}\right) = 52.850°$$

因此速度矢量和位置矢量的夹角为

$$\beta = \pi - \alpha = 127.15°$$

两个速度矢量的夹角为

$$\gamma = \beta - \frac{\pi}{2} = 37.15°$$

根据余弦定理，变轨所需的速度为

$$\Delta v_2 = \sqrt{v^2 + v_2^2 - 2vv_2 \cos\gamma} = 2691.522\ \mathrm{m/s}$$

考虑到卫星在此处需要减速，$\Delta v = -2691.522\ \mathrm{m/s}$ 与 v 的夹角为

$$\sin i = \frac{v_2}{\Delta v} \sin\gamma$$

解出 $i = 63.637°$

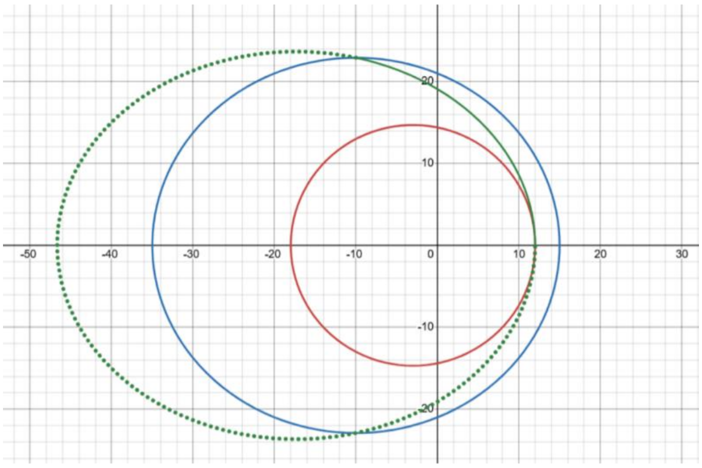

图 1：变轨示意图

上图是变轨示意图，红色的是旧轨道，蓝色的是新轨道，实线绿色的是卫星实际上走过的变轨轨道，虚线绿色是卫星完整的变轨轨道

根据活力公式可以解出第一次变轨所需的速度

$$v_1 = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a_1}\right)} = 6314.02\ \mathrm{m/s}$$

$$v_{peri} = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a}\right)} = 7270.050\ \mathrm{m/s}$$

速度增量为

$$\Delta v_1 = v_{peri} - v_1 = 956.030\ \mathrm{m/s}$$

此时速度矢量共线，故速度增量与速度矢量的夹角为 0

同样可以求出第二次变轨所需的速度，但是需要注意到这次变轨时，速度矢量并不重合

$$v_2 = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r_2} - \frac{1}{a_2}\right)} = 3993.337\ \mathrm{m/s}$$

$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r_2} - \frac{1}{a}\right)} = 4378.125\ \mathrm{m/s}$$

27.

1．行星 A 的轨道半长轴

开普勒第三定律公式：$\frac{a^3}{T^2} =$ 一个常数

对地球和行星 A 有：$\dfrac{a_A^3}{T_A^2} = \dfrac{a_\oplus^3}{T_\oplus^2}$

代入已知条件$a_\oplus = 1AU$, $T_\oplus = 1a^{1'}$, $T_A = 2\sqrt{2}a^{1'}$:

$$a_A^3 = \frac{T_A^2}{T_\phi^2} \cdot a_\phi^3 = (2\sqrt{2})^2 \cdot 1^3 = 8 \Rightarrow a_A = \sqrt[3]{8} = 2AU$$

2．行星 A 的轨道平均线速度

圆周运动线速度公式：$v = \frac{2\pi a}{T}$，对地球和行星 A 的速度比为：

$\frac{v_A}{v_\ominus} = \frac{a_A/T_A}{a_A/T_\oplus} = \frac{a_A\cdot T_\oplus}{a_\phi \cdot T_A}$代入$a_A = 2AU1a_\oplus = 1AU1T_A = 2\sqrt{2}a^{1'}/T_\oplus = 1\ a^{1'}$:

$$\frac{v_A}{30} = \frac{2\times 1}{1\times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707 \Rightarrow v_A \approx 30 \times 0.707 \approx 21.2km/s$$

3．速度差值与比较

速度差值： $|v_\Phi - v_A| = |30 - 21.2| = 8.8km/s$

结论：地球的轨道平均线速度更快。

28.

1．注意到$P_s = 0$ 且$r_c = 0$（恒星的压力由引力提供，恒星表面没有物质，因此没有压力）于是，有

$$\frac{P_s}{-R} \approx -\frac{GM\rho}{R^2}$$

带入密度的定义，有

$$\frac{P_s}{R} \approx \frac{GM}{R^2} \cdot \frac{M}{4/3\pi R^3}$$

化简得出

$$P_c \approx \frac{GM^2}{R^4} = 1.135 \cdot 10^{15}\ \mathrm{Pa}$$

这里的系被忽略掉了（导数都被近似成了斜率还留着系数干啥），提示中说了忽略系数，因此系数必须忽略掉，用量纲的角度就会直接得到这个式子。

2. 根据理想气体方程

$$PV = Nk_BT$$

数密度定义为\(n = \frac{N}{V}\)，为单位体积内粒子的数量，可以得出：

$$n = \frac{P}{k_BT} = 8.221 \cdot 10^{30}/m^3$$

3. 假设地球大气为理想气体地球大气压($P_E = 10^5\ \mathrm{Pa}$)，地球大气温度取($T_E = 300\ \mathrm{K}$)，根据理想气体方程

$$n_Ev = \frac{P_E}{k_BT_E} = 2.414 \cdot 10^{25}/m^3$$

两个数密度相比，有：

$$\frac{n}{n_E} = 340555$$

29.

（1）由反射定律可知，平行光垂直射入抛物面后经反射将汇于抛物线焦点。
故由题目信息得该射电望远镜的抛物面焦点为 D 点。
以 D 点为极坐标方程：

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

由抛物线 $e = 1$ 得

$$\rho = \frac{p}{1 + \cos\theta}$$

由几何关系得 $CD = \frac{p}{1+\cos(0°)} = \frac{p}{2}$

$$AD = BD = \frac{p}{1 + \cos(90°)} = p$$

$\because AD = DB$，$AB = 45\ \mathrm{m}$，D 为 AB 中点

$\therefore p = \frac{AB}{2} = AD = \frac{45}{2}$

$\therefore CD = \frac{p}{2} = \frac{45}{4}$

以 C 点为直角坐标方程 $y = kx^2$

已知 $CD = \frac{45}{4}$， $AB = BD = \frac{45}{2}$

∴ 该曲线过点 $\left(\frac{45}{2},\frac{45}{4}\right)$

解得： $y=\frac{x^2}{45}$

（2）由题目条件可知，该小行星与地球的最近距离与地日距离相比可忽略不计。
列出热辐射平衡方程：

$$4\pi\sigma T^4R^2=\pi R^2\cdot A$$

其中 R 为小行星半径， T 为小行星表面温度， A 为太阳常数。
得

$$T=\left(\frac{A}{4\sigma}\right)^{\frac{1}{4}}$$

由维恩位移定律得：

$$\lambda_{max}T=b\Rightarrow\lambda_{max}=\frac{b}{T}=b\cdot\left(\frac{4\sigma}{A}\right)^{\frac{1}{4}}$$

由望远镜分辨率的经验公式得：

$$\theta\,(\mathrm{rad})=1.22\frac{\lambda_{max}}{D}$$

∴ 该望远镜在该小行星热辐射峰值波段的分辨率

$$\theta=\frac{1.22b}{D}\left(\frac{4\sigma}{A}\right)^{\frac{1}{4}}$$

D 为望远镜的口径。
设该小行星近日距为 a，
则由题目条件得： $\theta a = 2R$

$\therefore a=\frac{2R}{\theta}=\frac{2DR}{1.22b}\left(\frac{A}{4\sigma}\right)^{\frac{1}{4}}$

由抛物线方程得：

$$\frac{p}{2}=a\quad\Rightarrow\quad p=2a$$

∴ 其轨道方程为

$$\rho=\frac{2a}{1+\cos\theta}=\frac{2}{1+\cos\theta}\cdot\frac{DR}{0.61b}\left(\frac{A}{4\sigma}\right)^{\frac{1}{4}}$$

代入数据得

$$\rho=\frac{70952148.3}{1+\cos\theta}\ \mathrm{m}$$

（3）考虑一个经典的玻尔原子模型，一个电子以角动量 $L = n\hbar$ 绕中心氢原子核（质子）做匀速圆周运动，中心距离为 r。
其总能量为 $E=E_k+E_p$。

动能：

$$E_k=\frac{mv^2}{2}$$

又由角动量：

$$rmv = L = n\hbar$$

由库仑力提供向心力可得：

$$\frac{v^2}{r} = \frac{kq^2}{r^2}$$

其中 q 为中心粒子（质子）电量。

氢原子质子与电子电量同为 q，可得：

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{kq^2}{2r}, \quad v^2 = \frac{kq^2}{mr}$$

势能：

$$E_p = -\frac{kq^2}{r}$$

总能量：

$$E_{总} = E_k + E_p = -\frac{kq^2}{2r}$$

由 $rmv = n\hbar \Rightarrow v = \frac{n\hbar}{mr}$，代入 $v^2 = \frac{kq^2}{mr}$ 得：

$$\frac{n^2\hbar^2}{m^2r^2} = \frac{kq^2}{mr} \Rightarrow r = \frac{n^2\hbar^2}{mkq^2}$$

代入总能量表达式：

$$E = -\frac{kq^2}{2r} = -\frac{mk^2q^4}{2n^2\hbar^2}$$

当一个电子由角动量 $L_1 = n_1$ 跃迁至 $L_2 = n_2$ 时所放出的能量为：

$$\Delta E = h\nu = \frac{mk^2q^4}{2\hbar^2}\left[\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right]$$

又已知 \(\lambda \nu = c \implies \nu = \frac{c}{\lambda}\)，故：
\frac{1}{\lambda} = \frac{mk^2 q^4}{2\pi \hbar^3 c}\left[\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right]

将 \lambda = 40.32\ \mu\text{m}， n_1 = 19 代入上式，解得：
n = n_2 = 45